

Zusammenfassung: Mathe 1

Beispiel zur Induktion

Behauptung: es gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \quad n \in \mathbb{N}$

Beweis: Induktion über n

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \text{ für } n=1: \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 \qquad \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \text{ für } n=1: \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$n \rightarrow n+1$:

Annahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

Zu zeigen: dann muss auch gelten $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n+1}{6} \cdot (n+2) \cdot (2n+3)$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{\text{laut Annahme}}{=} \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot (n+2) \cdot (2n+3) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Formeln zu komplexen Zahlen

Schreibweisen:

$$z = x + yi = r \cdot e^{i \cdot \phi} = r \cdot (\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi))$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}; \quad \phi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y \geq 0; \quad \phi = -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y < 0$$

Konjugation: $z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy$

Ist z die komplexe Lösung einer Gleichung, ist auch \bar{z} eine Lösung.

Addition: Die Vektoren addieren sich.

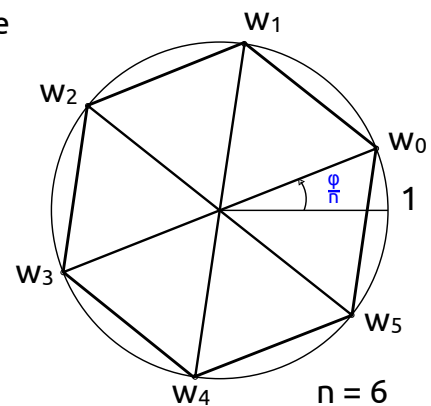
Multiplikation: Die Winkel addieren sich; die Beträge multiplizieren sich.

Multiplikation mit i : Linksrotation des Vektors um 90° ;
 $i^2 = -1 : 180^\circ$; $\sqrt{i} = i^{0.5} : 45^\circ$

Potenzen: $i^n = i^{(n \bmod 4)}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$

Division: Bruch mit konjugiert Komplexem des Nenners erweitern.

Quadrat: $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot \phi \cdot n}$



n-te Wurzeln w_k für $k = 0, 1, \dots, n-1$: $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \right)}$

Lösen von Gleichungen

p-q-Formel zur Lösung von Gleichungen: $z^2 + pz + q = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Beispiel zur quadratischen Ergänzung: $x^2 - 8x + 3$
 $(x-4)^2 - 16 + 3$
 $(x-4)^2 - 13$

Kongruenzgleichungen

Bestimmen des additiven Inversen d der Zahl e in \mathbb{Z}_m : $d = m - e$

Bestimmen des multiplikativen Inversen: $x^{-1} \pmod{m} = \frac{l \cdot m + 1}{x}$ (siehe auch Eukl.)

Es existiert dann genau ein multiplikatives Inverses, wenn x teilerfremd zu m ist.

Bsp.: $47^{-1} \pmod{60} = \frac{18 \cdot 60 + 1}{47} = 23$

Beispiel zum **Lösen einer Kongruenzgleichung:**

$347x \equiv 495 \pmod{60} \Leftrightarrow 47x \equiv 15 \pmod{60}$ zur Vereinfachung Reste berechnen
 $47x \equiv 15 \pmod{60} \Leftrightarrow x \equiv 345 \equiv 45 \pmod{60}$ mit multiplikativen Inversen multiplizieren
 \rightarrow Alle x der Form $x = 45 + n \cdot 60$ sind Lösungen von $347x - 495 = k \cdot 60$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Weiteres Beispiel: $2x \equiv 3 \pmod{6}$

Da 2 und 6 nicht teilerfremd sind, gibt es keine eindeutige Lösung. Da $\text{ggT}(2, 6) = 2$ kein Teiler von 3 ist gibt es keine Lösung.

Weiteres Beispiel: $2x \equiv 4 \pmod{6}$

Da 2 und 6 nicht teilerfremd sind, gibt es keine eindeutige Lösung. Da $t = \text{ggT}(2, 6)$ ein Teiler von 4 ist gibt es $t = 2$ Lösungen: $x_1 = 2, x_2 = 5$ (durch Probieren)

Reduzierte Restsätze: $\mathbb{Z}_m^* := \{k \in \mathbb{Z}_m \mid k \text{ teilerfremd zu } m\}$ Bsp.: $\mathbb{Z}_8^* := \{1, 3, 5, 7\}$

Eulersche ϕ -Funktion

$\phi(m)$: Anzahl der zu m teilerfremden Zahlen in \mathbb{Z}_m

- Für Primzahlen p gilt: $\phi(p) = p - 1$
- Für Primfaktorpotenzen $m = p^k$ gilt: $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ z. B.
- Für teilerfremde m und n gilt: $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$ $\phi(2 \cdot 5^3 \cdot 17) = 1 \cdot (5^3 - 5^2) \cdot 16$

Kleiner Satz von Fermat: Ist a teilerfremd zur Primzahl p , gilt: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Verallgemeinerung: $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \rightarrow a^x \equiv a^{x \bmod \phi(m)} \pmod{m}$

Euklidischer Algorithmus

i	r_i	q_i	x_i	y_i
-1	m		$x_{-1} = 1$	$y_{-1} = 0$
0	n	q_0	$x_0 = 0$	$y_0 = 1$
1	$r_1 = x_1 \cdot m + y_1 \cdot n$	q_1	$x_1 = x_{-1} - q_0 \cdot x_0 = 1$	$y_1 = y_{-1} - q_0 \cdot y_0 = -q_0$
2	$r_2 = x_2 \cdot m + y_2 \cdot n$	q_2	$x_2 = x_0 - q_1 \cdot x_1$	$y_2 = y_0 - q_1 \cdot y_1$
...
k	$r_i = x_i \cdot m + y_i \cdot n$	q_k	$x_i = x_{i-2} - q_{i-1} \cdot x_{i-1}$	$y_i = y_{i-2} - q_{i-1} \cdot y_{i-1}$
k + 1	0			

- größter gemeinsamer Teiler: $ggT(m, n) = r_i$
- multiplikatives Inverses: $n^{-1} \equiv y_i \pmod{m}$
- Lösungen von: $r_i = m \cdot x_i + n \cdot y_i$ ($-1 \leq i \leq k$)

nämlich $x = x_i + k \cdot \frac{n}{r_i}$ und $y = y_i - k \cdot \frac{m}{r_i}$ mit beliebigem $k \in \mathbb{Z}$

- Lösungen von: $m \cdot x + n \cdot y = c$ mit $c = f \cdot ggT(m, n) = f \cdot r_i \Leftrightarrow f = \frac{c}{r_i}$ wobei $f \in \mathbb{Z}$

nämlich $x = f \cdot x_i + k \cdot \frac{n}{r_i}$ und $y = f \cdot y_i - k \cdot \frac{m}{r_i}$ mit beliebigem $k \in \mathbb{Z}$

Chinesischer Restesatz

geg.: zueinander teilerfremde Module m_1, m_2, \dots, m_n und $c_1 \in \mathbb{Z}_{m_1}, c_2 \in \mathbb{Z}_{m_2}, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_{m_n}$

ges.: x für das gilt: $x \equiv c_1 \pmod{m_1}, x \equiv c_2 \pmod{m_2}, \dots, x \equiv c_n \pmod{m_n}$

zunächst festgelegt: $M := m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ und $M_k = \frac{M}{m_k}$ ($1 \leq k \leq n$)

damit gilt: $x \equiv (c_1 \cdot M_1 \cdot (M_1^{-1} \pmod{m_1}) + c_2 \cdot M_2 \cdot (M_2^{-1} \pmod{m_2}) + \dots + c_n \cdot M_n \cdot (M_n^{-1} \pmod{m_n})) \pmod{M}$

Bsp.: $x \equiv 3 \pmod{4}, x \equiv 1 \pmod{5}, x \equiv 7 \pmod{9}$

$\rightarrow x \equiv ((3 \cdot 45 \cdot 1) + (1 \cdot 36 \cdot 1) + (7 \cdot 20 \cdot 5)) \pmod{180} \rightarrow x \equiv 151 \pmod{180}$

Gleiches Bsp. mit Einsetzmethode:

Erste Kongruenz: $x \equiv 3 \pmod{4} \rightarrow x = 3 + 4k$

Zweite Kongruenz: $3 + 4k \equiv 1 \pmod{5}$

mit $4^{-1} \pmod{5} = 4$ multiplizieren $\rightarrow k \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow x = 3 + 4 \cdot (2 + l \cdot 5) = 11 + 20l$

Dritte Kongruenz: $11 + 20l \equiv 7 \pmod{9} \rightarrow 2 + 2l \equiv 7 \pmod{9}$

mit $2^{-1} \pmod{9} = 5$ multiplizieren $\rightarrow l \equiv 7 \pmod{9} \rightarrow x = 11 + 20 \cdot (7 + 9m) = 151 + 180m$

Kombinatorik

Binomialkoeffizient

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ definiert als
$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot \dots}{\underbrace{k \cdot k-1 \cdot k-2 \cdot k-3 \cdot \dots}_{k \text{ Faktoren}}}$$

„n über k“ (falls $k > n$ auf 0 festgesetzt)

Binomischer Lehrsatz

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x, y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Eigenschaften

Symmetrieeigenschaft

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

(es ist egal, ob man k Elemente auswählt oder genau k Elemente **nicht** auswählt)

Additionseigenschaft

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ für } k \geq 1$$

Rekursionseigenschaft

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}, \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k}, \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Vandermonde'sche Identität

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Beispielaufgabe

Wie viele Summanden $a^{93} \cdot b^7$ entstehen beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^{100}$?

$$\binom{100}{93} = \binom{100}{7} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 16007560800$$

Permutation und Kombination

Für die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k auszuwählen, gilt:

Auswahl	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
Kombination ohne Beachtung der Reihenfolge	$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$
Variation mit Beachtung der Reihenfolge	$P(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ $= \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Permutation mit Beachtung der Reihenfolge und $k = n$	$n!$	$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$ $m = \text{Anzahl der verschiedenen Elemente in } n$ $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

Beispiel zur Permutation mit Zurücklegen: Wie viele Anagramme gibt es zu „MISSISSIPPI“?

$n = 11$ (Buchstaben), $m = 4$ (verschiedene Buchstaben)

$$\rightarrow \binom{11}{1,4,4,2} = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$$

Sonstiges

Eine n -Elementige Menge hat 2^n Teilmengen.

Schubfachprinzip

Verteilt man mehr als n Objekte auf n Fächer, enthält mindestens ein Fach mehr als ein Objekt; verteilt man mehr als $k \cdot n$ Objekte auf n Fächer, enthält mindestens ein Fach mehr als k Objekte.

Mengen

Summenregel: $|A \cup B| = |A| + |B|$ (nur wenn A und B disjunkte Mengen sind!)

Produktregel: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

(Eine Menge in Betragsstrichen steht für die Anzahl der Elemente in der Menge.)

Inklusions-Exklusions-Prinzip:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{bzw.} \quad |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Beispiel: Wie viele Zahlen von 1 bis 1000 sind durch 6 oder 7 teilbar?

A = alle durch 6 teilbaren Zahlen, B = alle durch 7 teilbaren Zahlen

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{6 \cdot 7} \right\rfloor = 285$$

Darstellung von Zahlen

$$0 := \emptyset, 1 := \{0\} = \{\emptyset\}, 2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 := \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \dots$$

Es gilt: $m \cap n = \min(m, n)$ und $m \cup n = \max(m, n)$

Relationen

Eine Relation R zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$. Für $(a, b) \in R$ sagt man: „ a steht in Relation R zu b “.

Oft schreibt man auch $a R b$.

Umkehrrelation/inverse Relation

Umkehrrelation für $R \subseteq A \times B$: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$

Verkettung/Verknüpfung

Verkettung aus den Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$:

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S\} \subseteq A \times C$$

Eigenschaften von Relationen für den Spezialfall $R \subseteq A \times A$

Eine Relation R in A heißt

- **reflexiv**, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in R$
→ Jedes Element steht zu sich selbst in Relation.

- **irreflexiv**, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \notin R$
→ Kein Element steht zu sich selbst in Relation.
- **symmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$
→ Jede Relation gilt auch umgekehrt.
- **antisymmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$
→ Gilt eine Relation umgekehrt sind die Elemente gleich.
- **asymmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$
→ Keine Relation gilt auch umgekehrt.
- **transitiv**, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt: $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
→ Bei Verkettung von Relationen besteht auch eine Relation zwischen erstem und letztem Element.

Äquivalenzrelation

Eine Relation R auf einer Menge A heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Für $(a, b) \in R$ sagt man auch: „ a ist äquivalent zu b “.

Äquivalenzklasse

R sei eine Äquivalenzrelation auf A und $a \in A$. Dann heißt die Menge $[a] = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$ die **Äquivalenzklasse** von a . Sie besteht aus allen Elementen, die äquivalent zu a sind (und je zwei Elemente aus $[a]$ sind auch äquivalent zueinander). Man nennt a und jedes andere Element aus $[a]$ einen **Vertreter** aus dieser Äquivalenzklasse.

Sei R eine Äquivalenzrelation auf A , dann gilt:

- Je zwei verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt (besitzen kein gemeinsames Element).
- Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist gleich A .

Ordnung(srelation)

Eine Relation R in einer Menge A heißt **Ordnung(srelation)**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Eine Relation R in einer Menge A heißt **strikte Ordnung(srelation)**, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Eine Relation R in einer Menge A heißt **totale Ordnung(srelation)**, alle $(a, b) \in A$ bezüglich R in Relation gesetzt werden können.

Eigenschaften von Funktionen

- **injektiv**: es gibt nicht mehrere x mit gleichem $f(x)$ → eindeutig umkehrbar
- **surjektiv**: alle Elemente der Zielmenge werden adressiert → für jedes y umkehrbar
- **bijektiv**: gleichzeitig injektiv und surjektiv → für jedes y eindeutig umkehrbar