

## Zusammenfassung: Grundlagen der Informatik

### Zahlensysteme, b-adische Darstellung, Umrechnung

Beispiel: Umrechnung von  $(69.59375)_{10}$  ins Dualsystem

#### Rechnen im Quellsystem

##### Divisionsverfahren

$$69 / 2 = 34 \quad \text{Rest } 1$$

$$34 / 2 = 17 \quad \text{Rest } 0$$

$$17 / 2 = 8 \quad \text{Rest } 1$$

$$8 / 2 = 4 \quad \text{Rest } 0$$

$$4 / 2 = 2 \quad \text{Rest } 0$$

$$2 / 2 = 1 \quad \text{Rest } 0$$

$$1 / 2 = 0 \quad \text{Rest } 1$$

→ ganzzahliger Anteil:  $(1000101)_2$

$$0.59375 \cdot 2 = 1.1875$$

$$0.1875 \cdot 2 = 0.375$$

$$0.375 \cdot 2 = 0.75$$

$$0.75 \cdot 2 = 1.5$$

$$0.5 \cdot 2 = 1$$

→ gebrochener Anteil:  $(0.10011)_2$

##### Subtraktion der größten Potenzen

$$69 - 2^6 = 5$$

$$5 - 2^2 = 1$$

$$1 - 2^0 = 0$$

→ ganzzahliger Anteil  $2^6 + 2^2 + 2^0 = (1000101)_2$

$$0.59375 = 19 / 2^5$$

$$19 - 2^4 = 3$$

$$3 - 2^1 = 1$$

$$1 - 2^0 = 0$$

→  $(19)_{10} = (10011)_2$  → gebrochener Anteil:  $(0.10011)_2$

#### Rechnen im Zielsystem

##### Mult./Additionsverfahren

$$(1000101.10011)_2$$

$$= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} = (69.59375)_{10}$$

Ergebnis (in jedem Fall):  $(69.59375)_{10} = (1000101.10011)_2$

##### Hornerschema

$$\text{Beispiel: } 14 \cdot 16^3 + 15 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 1 = ((14 \cdot 16 + 15) \cdot 16 + 0) \cdot 16 + 1 = 61185$$

$$\text{weiteres Beispiel: } x^2 + 3x + 4 = (x + 3) \cdot x + 4$$

### Zahlendarstellung

#### Zahlen mit Vorzeichen

- Darstellung mit Vorzeichen und Betrag
  - Bsp.:  $-8 = (10001000)_2$  mit 8 Bit
- Exzessdarstellung
  - Bsp.:  $-8 = (01111000)_2$  in Exzess-128 mit 8 Bit
- b-1-Komplement
  - Bsp.:  $-8 = (11110111)_2$  im Einerkomplement mit 8 Bit
  - Berechnung des b-1-Komplment von a:  $(b^N - 1) - a$
  - Bei Addition Einerrücklauf beachten (im Gegensatz zum b-Komplement)
- b-Komplement
  - Bsp.:  $-8 = (11111000)_2$  im Zweierkomplement mit 8 Bit
  - Berechnung des b-Komplment von a:  $(b^N) - a$
  - $b\text{-Komplement} = b\text{-1-Komplement} + 1$

#### Reelle Zahlen

- Festkommadarstellung

#### Potenzen

x	$2^x$	$16^x$
0	1	1
1	2	16
2	4	256
3	8	4096
4	16	65536
5	32	1048576
6	64	16777216
7	128	268435456
8	256	4294967296
9	512	68719476736
10	1024	
11	2048	
12	4096	
13	8192	
14	16384	
15	32768	
16	65536	

#### Hexziffern

A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

- feste Zahl von Bits steht für Vor- und Nachkommastellen zur Verfügung
- Vorzeichen wird in den Vorkommastellen dargestellt
- Bsp.:  $(1110.001011)_2 = (0000\ 0000\ 1110\ 0010)_2$  mit 12 Bits für die Vorkomma- und 4 Bits für die Nachkommastellen
- **Allgemeine Gleitkommadarstellung**
  - Form:  $z = m \cdot B^e$  (mit Mantisse  $m$ , Exponent  $e$  und fester Exponentenbasis  $B$ )
  - Mantisse: gebrochener Anteil, bestimmt Genauigkeit  
Bedingung für Normalisierung:  $B^{-1} \leq m < 1$  (bei IEEE anders!)
  - Exponent: positive oder negative Ganzzahl (angegeben in Exzess-128), bestimmt den Bereich der Darstellbaren Zahlen
- **Unterschiede und Festlegungen der Gleitkommadarstellung im IEEE-Format**
  - Exponentenbasis: 2
  - „Single Precision“ (32-Bit): 1 Bit für Vorzeichen, 23 Bit für Mantisse, 8 Bit für Exponent
  - Null:  $e = (0\dots0)_2$ ,  $m = (0\dots0)_2$
  - Unendlich:  $e = (1\dots1)_2$ ,  $m = (0\dots0)_2$ , Vorzeichen entscheidet ob Plus- oder Minusunendlich
  - NaN:  $e = (1\dots1)_2$ ,  $m \neq (0\dots0)_2$
  - Normalisiertes Format:  $e \neq (0\dots0)_2$  und  $e \neq (1\dots1)_2$ 
    - Bedingung für Normalisierung der Mantisse:  $1 \leq |m| < 2$   
 $m = (1.M_1M_2M_3\dots M_{23})_2$
    - Exponent: in **Exzess-127** angegeben
  - Denormalisiertes Format:  $e = (0\dots0)_2$  und  $m \neq (1\dots1)_2$ 
    - Mantisse muss nicht normalisiert sein:  
 $m = (0.M_1M_2M_3\dots M_{23})_2$
    - Exponent: auf -126 festgelegt

#### **Ermitteln des Unterlauf- und Überlaufbereichs der Darstellung**

- Unterlaufbereich:  $|z| < m \cdot B^e$  (für alle Darstellbaren  $m > 0$ ,  $e$ )
  - kleinstes  $m$  suchen, z. B.  $m = (0.1)_2$  (allg. Darstellung) oder  $m = 2^{-23}$  (IEEE 32-Bit, denormalisiertes Format)
  - kleinstes  $e$  suchen, z. B.  $e = -128$  (für 8-Bit-Zweierkomplement) oder  $e = -126$  (IEEE 32-Bit, denormalisiertes Format)
- Überlaufbereich:  $|z| > m \cdot B^e$  (für alle Darstellbaren  $m > 0$ ,  $e$ )
  - größte  $m$  suchen, z. B.  $m = 1 - 2^{-15}$  (allg. Darstellung, 15-Bit Mantisse) oder  $m = 2 - 2^{-23}$  (IEEE 32-Bit)
  - größte  $e$  suchen, z. B.  $e = 127$  (für 8-Bit-Zweierkomplement) oder  $e = 127$  (IEEE 32-Bit)

#### **Ermitteln des minimalen Abstands zweier Werte in bestimmten Bereich**

Beispiel: Bereich:  $2^{-30}$  bis  $2^{-29}$ , Mantissengröße: 15 Bit

1. Überprüfen, ob gilt  $e_1 = e_2$ :  
 $2^{-30} \leq z_1 \wedge z_2 < 2^{-29} \rightarrow (0.1)_2 \cdot 2^{-29} \leq z_1 \wedge z_2 < (1.0)_2 \cdot 2^{-29} \rightarrow e_1 = e_2 = 2^{-29}$   
 für IEEE-Format:  
 $2^{-30} \leq z_1 \wedge z_2 < 2^{-29} \rightarrow (1.0)_2 \cdot 2^{-30} \leq z_1 \wedge z_2 < (1.1\dots1)_2 \cdot 2^{-30} \rightarrow e_1 = e_2 = 2^{-30}$
2. Kleinsten Abstand  $\Delta m_{\min}$  zwischen  $m_1$  und  $m_2$  ermitteln: in diesem Beispiel mit 15 Mantissenstellen  
 $\Delta m_{\min} = 2^{-15}$
3. Dann gilt folgende Formel:  
 $d_{\min} = z_1 - z_2 = m_1 \cdot 2^{e_1} - m_2 \cdot 2^{e_2} = (m_1 - m_2) \cdot 2^{e_{1/2}} = \Delta m_{\min} \cdot 2^{e_{1/2}} = 2^{-15} \cdot 2^{-29} = 2^{-44}$

#### **Darstellbarkeit einer Zahl überprüfen**

Wann ist eine Zahl *nicht* darstellbar?

- Unterlauf, Überlauf
- Zahl der Mantissenstellen genügt nicht, um Wert präzise darzustellen

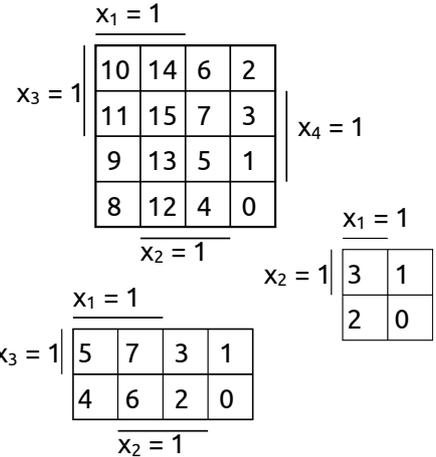
Beispiel (nicht IEEE):

$$z = 256 + \frac{17}{256} = (0.1)_2 \cdot 2^9 + (10001)_2 \cdot 2^{-8} = (0.1)_2 \cdot 2^9 + (0.00000000000010001)_2 \cdot 2^9 = (0.10000000000010001)_2 \cdot 2^9$$

→ hier würden mindestens 17 Mantissenstellen benötigt, um den Wert präzise darzustellen

### KV-Diagramme

Minterme: jede Variable (bei 0 negiert); durch *und* verknüpft  
 Maxterme: jede Variable (bei 1 negiert); durch *oder* verknüpft  
 DNF: alle Minterme mit einschlägigen Index durch *oder* verknüpft  
 KNF: alle Maxterme mit nicht einschlägigen Index durch *und* verknüpft



### Flipflops

RS-Flipflop

R	S	Q <sub>alt</sub>	Q <sub>neu</sub>	
0	0	0	0	Ruhe
0	0	1	1	speichern
0	1	0	1	Setzen
0	1	1	1	
1	0	0	0	Rücksetzen
1	0	1	0	

JK-Flipflop

J	K	Q <sub>alt</sub>	Q <sub>neu</sub>	
0	0	0	0	Ruhe
0	0	1	1	speichern
0	1	0	0	Rücksetzen
0	1	1	0	
1	0	0	1	Setzen
1	0	1	1	
1	1	0	1	Toggle
1	1	1	0	

D-Flipflop

D	Q <sub>alt</sub>	Q <sub>neu</sub>	
0	0	0	Rücksetzen
0	1	0	
1	0	1	Setzen
1	1	1	

T-Flipflop

T	Q <sub>alt</sub>	Q <sub>neu</sub>	
0	0	0	Ruhe
0	1	1	speichern
1	0	1	Toggle
1	1	0	

### MIPS-Architektur

**Eckdaten:** RISC (reduced instruction set computer), Load/Store-Architektur (Nur Speicherwerk mit Registern verbunden, Rechenwerk/ALU liest und schreibt nur aus/zur Registern), 32 gewöhnliche Register (erstes immer Null), 2 Spezialregister (hi, lo)

**Ablauf:** Befehle stehen im Speicher, Programmschrittzähler (PC) zeigt auf aktuellen Befehl, Befehl wird geholt und ausgeführt,  $PC \leftarrow PC + 4$ , Befehl wird geholt und aus...

### Dekodierung der Maschinenbefehle

- Format R (register): Opcode = (000000)<sub>2</sub>
  - Rs: Nummer des Eingaberegisters 1 (5 Bit für Nummer 0-31)
  - Rt: Nummer des Eingaberegisters 2 (5 Bit)
  - Rd: Nummer des Ausgaberegisters (5 Bit)
  - Shamt: Zahl der Stellen, um die geschoben werden soll (Shift amount, 5 Bit, nur bei Schiebeoperationen verwendet)
  - Function: bestimmt Operation (6 Bit)
- Format J (jump): Opcode = (00001x)<sub>2</sub>
  - Opcode (6 Bit) bestimmt Funktion, z. B. (000010)<sub>2</sub> absoluter Sprung
  - Restliche 26 Bit z. B. Sprungadresse
- Format I (immediate): Opcode = (xxxxxx)<sub>2</sub>
  - Opcode (6 Bit) bestimmt Funktion, z. B. (001000)<sub>2</sub> Addieren
  - Rs: Quellregister (5 Bit)
  - Rt: Zielregister (5 Bit)
  - Wert (16 Bit)

### Übersicht über die wichtigsten Maschinen-/Assemblerbefehle

#### Arithmetik

**Addition:**  $Rd = Rs + Rt$

mit Beachtung des Vorzeichens:

Format R	<b>000000</b>	Rs	Rt	Rd	00000	<b>100000</b>
Assembler	<b>add</b>	\$Rd, \$Rs, \$Rt				

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt Rd 00000 **100001**  
 Assembler **addu** \$Rd, \$Rs, \$Rt

**Addition eines unmittelbaren Wertes** (im Zweierkomplement):  $Rt = Rs + \text{Wert}$

mit Beachtung des Vorzeichens:

Format I **001000** Rs Rt Wert (16 Bit)  
 Assembler **addi** \$Rt, \$Rs, Wert

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format I **001001** Rs Rt Wert (16 Bit)  
 Assembler **addiu** \$Rt, \$Rs, Wert

**Subtraktion:**  $Rd = Rs - Rt$

mit Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt Rd 00000 **100010**  
 Assembler **sub** \$Rd, \$Rs, \$Rt

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt Rd 00000 **100011**  
 Assembler **subi** \$Rd, \$Rs, \$Rt

**Multiplikation** zweier 32-Bit-Werte zu einem 64-Bit-Wert:  $(hi, lo) = Rs \cdot Rt$

mit Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt 00000 00000 **011010**  
 Assembler **mult** \$Rs, \$Rt

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt 00000 00000 **011011**  
 Assembler **multu** \$Rs, \$Rt

**Ganzzahlige Division** mit Rest:  $hi = Rs \bmod Rt$ ,  $lo = Rs / Rt$

mit Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt 00000 00000 **011010**  
 Assembler **div** \$Rs, \$Rt

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt 00000 00000 **011011**  
 Assembler **divu** \$Rs, \$Rt

**Verschieben von hi:**  $Rd = hi$

Format R **000000** 00000 00000 Rd 00000 **010000**  
 Assembler **mfhi** \$Rd

**Verschieben von lo:**  $Rd = lo$

Format R **000000** 00000 00000 Rd 00000 **010010**  
 Assembler **mflo** \$Rd

### Logische Operationen und Vergleichsoperationen

**Kleiner als:** wenn  $Rs < Rt$ , dann  $Rd = 1$ , sonst  $Rd = 0$

mit Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt Rd 00000 **101010**  
 Assembler **slt** \$Rd, \$Rs, \$Rt

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format R **000000** Rs Rt Rd 00000 **101011**  
 Assembler **sltu** \$Rd, \$Rs, \$Rt

**Kleiner als mit unmittelbarem Wert:** wenn  $Rs < \text{Wert}$ , dann  $Rd = 1$ , sonst  $Rd = 0$

mit Beachtung des Vorzeichens:

Format I **001010** Rs Rt Wert (16 Bit)  
 Assembler **slti** \$Rt, \$Rs, Wert

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format I **001011** Rs Rt Wert (16 Bit)  
 Assembler **sltiu** \$Rt, \$Rs, Wert

**Bitweise UND-Verknüpfung:**  $Rd = Rs \text{ und } Rt$

Format R **000000** Rs Rt Rd 00000 **100100**  
 Assembler **and** \$Rd, \$Rs, \$Rt

**Bitweise ODER-Verknüpfung:**  $Rd = Rs \text{ oder } Rt$

Format R     **00000**   Rs     Rt     Rd     00000   **100101**  
 Assembler   **or**   \$Rd, \$Rs, \$Rt

**Bitweise XOR-Verknüpfung:**  $Rd = Rs \text{ xor } Rt$

Format R     **00000**   Rs     Rt     Rd     00000   **100110**  
 Assembler   **xor**   \$Rd, \$Rs, \$Rt

**Bitweise NOR-Verknüpfung:**  $Rd = Rs \text{ nor } Rt$

Format R     **00000**   Rs     Rt     Rd     00000   **100111**  
 Assembler   **nor**   \$Rd, \$Rs, \$Rt

**Bitweise UND-Verknüpfung mit unmittelbarem Wert:**  $Rd = Rs \text{ und } Rt$

Format I     **001100**   Rs     Rt     Wert (16 Bit)  
 Assembler   **andi**   \$Rt, \$Rs, Wert

**Bitweise ODER-Verknüpfung mit unmittelbarem Wert:**  $Rd = Rs \text{ oder } Rt$

Format I     **001101**   Rs     Rt     Wert (16 Bit)  
 Assembler   **ori**   \$Rt, \$Rs, Wert

**Bitweise XOR-Verknüpfung mit unmittelbarem Wert:**  $Rd = Rs \text{ xor } Rt$

Format I     **001110**   Rs     Rt     Wert (16 Bit)  
 Assembler   **xori**   \$Rt, \$Rs, Wert

**Sprünge**

**Bedingter relativer Sprung:** Springe, wenn eine Bedingung erfüllt ist, um die als Wert angegebene Anzahl von 32-Bit-Wörtern.

Springe bei Gleichheit der Inhalte von Rs und Rt:

Format I     **000100**   Rs     Rt     Wert (16 Bit)  
 Assembler   **beq**   \$Rs, \$Rt, Marke

Springe bei Ungleichheit der Inhalte von Rs und Rt:

Format I     **000101**   Rs     Rt     Wert (16 Bit)  
 Assembler   **bne**   \$Rs, \$Rt, Marke

**Absoluter Sprung:** Springe zur angegebenen Adresse, wobei

- die letzten beiden Ziffern immer 0 sind und daher weggelassen werden
- und die ersten vier Bits aus Platzgründen auch weggelassen werden und dafür der Wert der Adresse des Sprungbefehles angenommen wird.

Format J     **000010**   Adresse (26 Bit, siehe Bemerkung)  
 Assembler   **j**     Marke

Gleicher Befehl mit vorherigem Speichern der Adresse der nächsten Instruktion in \$ra:

Format J     **000011**   Adresse (26 Bit, siehe Bemerkung)  
 Assembler   **jal**   Marke

**Absoluter Sprung mittels indirekter Adressierung:** Interpretiere den Wert von Register Rs als Zieladresse und springe dorthin.

Format R     **000000**   Rs     00000   00000   00000   **001000**  
 Assembler   **jr**     \$Rs

**Speicherooperationen**

**„Load Word“:** Hole das Wort von der Adresse im Speicher, die sich aus dem Inhalt von Rs plus dem Versatz ergibt und speichere es in Rt.

Format I     **100011**   Rs     Rt     Versatz (16 Bit)  
 Assembler   **lw**   \$Rt, Versatz(\$Rs)

**„Load Byte“:** Hole das Byte von der Adresse (siehe oben) und speichere es in den rechten 8 Bit von Rt. mit Beachtung des Vorzeichens:

Format I     **100000**   Rs     Rt     Versatz (16 Bit)  
 Assembler   **lb**   \$Rt, Versatz(\$Rs)

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format I     **100100**   Rs     Rt     Versatz (16 Bit)  
 Assembler   **lbu**   \$Rt, Versatz(\$Rs)

**„Store Word“:** Schreibe den Inhalt von Rt an die Speicheradresse (Berechnung siehe oben).

Format I     **101011**   Rs     Rt     Versatz (16 Bit)  
 Assembler   **sw**   \$Rt, Versatz(\$Rs)

**„Store Byte“:** Schreibe die rechtesten 8 Bit von Rt an die berechnete Speicheradresse.

Format I     **101000**   Rs     Rt     Versatz (16 Bit)  
 Assembler   **sb**     \$Rt, Versatz(\$Rs)

**Load „upper word immediate“:** Linke 16 Bit von Rt werden auf Wert gesetzt, die restlichen 16 Bit auf 0. Die rechten 16-Bit können mit *ori* in einem zweiten Schritt gesetzt werden.

Format I     **001111**   0000   Rt     Wert (16 Bit)  
 Assembler   **lui**    \$Rt, Wert

### Schiebeoperationen

**Schieben nach links** (der Zahl in \$Rt, um shamt Stellen, Ergebnis speichern in \$Rd):

Format R     **000000**   00000   Rt     Rd     shamt   **000000**  
 Assembler   **sll**    \$Rd, \$Rt, shamt

**Schieben nach rechts** (der Zahl in \$Rt, um shamt Stellen, Ergebnis speichern in \$Rd):

mit Beachtung des Vorzeichens:

Format R     **000000**   00000   Rt     Rd     shamt   **000010**  
 Assembler   **srl**    \$Rd, \$Rt, shamt

ohne Beachtung des Vorzeichens:

Format R     **000000**   00000   Rt     Rd     shamt   **000011**  
 Assembler   **sra**    \$Rd, \$Rt, shamt

### Marken und Pseudobefehle

Notation von Marken: „name\_der\_marke:“; Marke kann dann anstelle einer Adresse verwendet werden.

**li**    \$Rd, Wert        Belegung eines Registers mit einem 32-Bit-Wert  
**la**    \$Rd, Marke     Laden der *Adresse* einer Marke  
**move** \$Rd, \$Rs     Kopieren des Wertes von \$Rs nach \$Rd  
**not**   \$Rd, \$Rs     Einernkomplement des Wertes von \$Rs in \$Rd speichern  
**b**     Marke         unbedingter (relativer) Sprung

### Programmcodebereiche und Datenbereiche

Programmcode wird eingeleitet durch „.text“, Datenbereiche durch „.data“. Direktiven in Datenbereichen:

.byte Wert1, Wert2, ..., WertN	Bytes, die in dieser Reihenfolge im Speicher abgelegt werden
.word Wert1, Wert2, ..., WertN	Wörter, die in dieser Reihenfolge im Speicher abgelegt werden
.space n	Reserviert einen n Byte langen Bereich
.ascii Zeichenkette	Bytes, die eine Zeichenkette bilden
.asciiz Zeichenkette	Bytes, die eine null-terminierte Zeichenkette bilden

### Assemblersymbole

Direkte Bezeichnung	Symbolische Bezeichnung	Bedeutung
\$0	\$zero	immer 0
\$1	\$at	Assembler nutzt dies temporär
\$2, \$3	\$v0, \$v1	Ergebnisse (values) von Unterprogrammen
\$4, ..., \$7	\$a0, \$a1, \$a2, \$a3	Aufrufparameter für Unterprogramme
\$8, ..., \$15	\$t0, ..., \$t7	temporäre Werte; können vom Unterprogramm geändert werden
\$16, ..., \$23	\$s0, ..., \$s7	gespeicherte Werte; zurückstellen vor Rückkehr
\$24, \$25	\$t8, \$t9	weitere temporäre Werte
\$26, \$27	\$k0, \$k1	reserviert für spezielle Ereignisse
\$28	\$gp	Globalspeicherzeiger (Pointer)
\$29	\$sp	Stapelspeicherzeiger (Pointer)
\$30	\$s8/\$fp	Framepointer bzw. weitere s-Variable
\$31	\$ra	Rücksprungadresse für Unterprogramme