Zusammenfassung: Mathe 1

Beispiel zur Induktion

Behauptung: es gilt $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}\cdot(n+1)\cdot(2n+1) \quad n\in\mathbb{N}$

Beweis: Induktion über n

Induktionsanfang: $n = 1$

$\sum_{k=1}^{n} k^2$ für $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ $\qquad$ $\frac{n}{6}\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ für $n = 1$: $\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3 = 1$

n → n + 1:

Annahme: Für ein $n\in\mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n}{6}\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$

Zu zeigen: dann muss auch gelten $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n+1}{6}\cdot(n+2)\cdot(2n+3)$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{laut Annahme}}{=} \frac{n}{6}\cdot(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\cdot(n(2n+1)+6(n+1))$$

$$= \frac{n+1}{6}\cdot(n+2)(2n+3) \quad \blacksquare$$

Formeln zu komplexen Zahlen

Schreibweisen:

$$z = x + yi = r\cdot e^{i\cdot\phi} = r\cdot(\cos(\phi) + i\cdot\sin(\phi))$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}\,; \quad \phi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y\geq 0\,; \quad \phi = -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y<0$$

Konjugation: $z = z + iy \Leftrightarrow \overline{z} = x - iy$
Ist z die komplexe Lösung einer Gleichung, ist auch $\overline{z}$ eine Lösung.

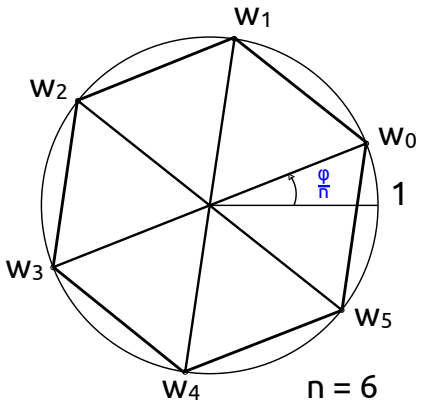
Addition: Die Vektoren addieren sich.

Multiplikation: Die Winkel addieren sich; die Beträge multiplizieren sich.
Multiplikation mit i: Linksrotation des Vektors um 90°;
$i^2 = -1$: 180°; $\sqrt{(i)} = i^{0.5}$: 45°

Potenzen: $i^n = i^{(n \bmod 4)}$; $\quad i^2 = -1$; $\quad i^3 = -i$

Division: Bruch mit konjugiert Komplexem des Nenners erweitern.

Quadrat: $z^n = r^n\cdot e^{i\cdot\phi\cdot n}$



n-te Wurzeln w_k für $k = 0, 1, \ldots, n-1$: $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\phi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}$

Lösen von Gleichungen

p-q-Formel zur Lösung von Gleichungen: $z^2 + pz + q = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Beispiel zur quadratischen Ergänzung:
$$x^2 - 8x + 3$$
$$(x-4)^2 - 16 + 3$$
$$(x-4)^2 - 13$$

Kongruenzgleichungen

Bestimmen des additiven Inversen d der Zahl e in $\mathbb{Z}_m$: $d = m - e$

Bestimmen des multiplikativen Inversen: $x^{-1} (mod\ m) = \frac{l \cdot m + 1}{x}$ (siehe auch Eukl.)

Es existiert dann genau ein multiplikatives Inverses, wenn x teilerfremd zu m ist.

Bsp.: $47^{-1}\ mod\ 60 = \frac{18 \cdot 60 + 1}{47} = 23$

Beispiel zum **Lösen einer Kongruenzgleichung**:

$347x \equiv 495 (mod\ 60) \Leftrightarrow 47x \equiv 15 (mod\ 60)$ zur Vereinfachung Reste berechnen

$47x \equiv 15 (mod\ 60) \Leftrightarrow x \equiv 345 \equiv 45 (mod\ 60)$ mit multiplikativen Inversen multiplizieren

→ Alle x der Form $x = 45 + n \cdot 60$ sind Lösungen von $347x - 495 = k \cdot 60$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Weiteres Beispiel: $2x \equiv 3 (mod\ 6)$
Da 2 und 6 nicht teilerfremd sind, gibt es keine eindeutige Lösung. Da ggT(2, 6) = 2 kein Teiler von 3 ist gibt es keine Lösung.

Weiteres Beispiel: $2x \equiv 4 (mod\ 6)$
Da 2 und 6 nicht teilerfremd sind, gibt es keine eindeutige Lösung. Da t = ggT(2, 6) ein Teiler von 4 ist gibt es $t = 2$ Lösungen: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ (durch Probieren)

Reduzierte Restsätze: $\mathbb{Z}_m^* := \{k \in \mathbb{Z}_m \mid k \text{ teilerfremd zu } m\}$ Bsp.: $\mathbb{Z}_8^* := \{1, 3, 5, 7\}$

Eulersche φ-Funktion

$\phi(m)$: Anzahl der zu m teilerfremden Zahlen in $\mathbb{Z}_m$

- Für Primzahlen p gilt: $\phi(m) = p - 1$
- Für Primfaktorpotenzen $m = p^k$ gilt: $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ z. B. $\phi(2 \cdot 5^3 \cdot 17) = 1 \cdot (5^3 - 5^2) \cdot 16$
- Für teilerfremde m und n gilt: $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$

Kleiner Satz von Fermat: Ist a teilerfremd zur Primzahl p, gilt: $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$

Verallgemeinerung : $a^{\phi(m)} \equiv 1 \mod m$ → $a^x \equiv a^{x \bmod \phi(m)} \mod m$

Euklidischer Algorithmus

i	**r_i**	**q_i**	**x_i**	**y_i**
-1	m		$x_{-1} = 1$	$y_{-1} = 0$
0	n	q_0	$x_0 = 0$	$y_0 = 1$
1	$r_1 = x_1 \cdot m + y_1 \cdot n$	q_1	$x_1 = x_{-1} - q_0 \cdot x_0 = 1$	$y_1 = y_{-1} - q_0 \cdot y_0 = -q_0$
2	$r_2 = x_2 \cdot m + y_2 \cdot n$	q_2	$x_2 = x_0 - q_1 \cdot x_1$	$y_2 = y_0 - q_1 \cdot y_1$
…	…	…	…	…
k	$r_i = x_i \cdot m + y_i \cdot n$	q_k	$x_i = x_{i-2} - q_{i-1} \cdot x_{i-1}$	$y_i = y_{i-2} - q_{i-1} \cdot y_{i-1}$
k + 1	0			

- größter gemeinsamer Teiler: $ggT(m,n)=r_i$
- multiplikatives Inverses: $n^{-1}\equiv y_i \,(mod\, m)$
- Lösungen von: $r_i=m\cdot x_i+n\cdot y_i \quad (-1\leqslant i\leqslant k)$

  nämlich $x=x_i+k\cdot\frac{n}{r_i}$ und $y=y_i-k\cdot\frac{m}{r_i}$ mit beliebigem $k\in\mathbb{Z}$

- Lösungen von: $m\cdot x+n\cdot y=c$ mit $c=f\cdot ggT(m,n)=f\cdot r_i\Leftrightarrow f=\frac{c}{r_i}$ wobei $f\in\mathbb{Z}$

  nämlich $x=f\cdot x_i+k\cdot\frac{n}{r_i}$ und $y=f\cdot y_i-k\cdot\frac{m}{r_i}$ mit beliebigem $k\in\mathbb{Z}$

Chinesischer Restesatz

geg.: zueinander teilerfremde Module $m_1, m_2, \ldots, m_n$ und $c_1\in\mathbb{Z}_{m_1}, c_2\in\mathbb{Z}_{m_2}, \ldots, c_n\in\mathbb{Z}_n$

ges.: x für das gilt: $x\equiv c_1 \,mod\, m_1, x\equiv c_2 \,mod\, m_2, \ldots, x\equiv c_n \,mod\, m_n$

zunächst festgelegt: $M:=m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_n$ und $M_k=\frac{M}{m_k} \quad (1\leqslant k\leqslant n)$

damit gilt: $x\equiv(c_1\cdot M_1\cdot(M_1^{-1} \,mod\, m_1)+c_2\cdot M_2\cdot(M_2^{-1} \,mod\, m_2)+\ldots+c_n\cdot M_n\cdot(M_n^{-1} \,mod\, m_n)) \,mod\, M$

Bsp.: $x\equiv 3\,(mod\,4), x\equiv 1\,(mod\,5), x\equiv 7\,(mod\,9)$
→ $x\equiv((3\cdot 45\cdot 1)+(1\cdot 36\cdot 1)+(7\cdot 20\cdot 5)) \,mod\, 180$ → $x\equiv 151 \,mod\, 180$

Gleiches Bsp. mit Einsetzmethode:
Erste Kongruenz: $x\equiv 3\,(mod\,4)$ → $x=3+4k$
Zweite Kongruenz: $3+4k\equiv 1\,(mod\,5)$
mit $4^{-1} \,mod\, 5=4$ multiplizieren → $k\equiv 2\,(mod\,5)$ → $x=3+4\cdot(2+l\cdot 5)=11+20l$
Dritte Kongruenz: $11+20l\equiv 7\,(mod\,9)$ → $2+2l\equiv 7\,(mod\,9)$
mit $2^{-1} \,mod\, 9=5$ multiplizieren → $l\equiv 7\,(mod\,9)$ → $x=11+20\cdot(7+9m)=151+180m$

Kombinatorik

Binomialkoeffizient

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ definiert als $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \underbrace{\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \frac{n-3}{k-3} \cdots}_{k \text{ Faktoren}}$

„n über k“ (falls k > n auf 0 festgesetzt)

Binomischer Lehrsatz

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x,y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Eigenschaften

Symmetrieeigenschaft $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(es ist egal, ob man k Elemente auswählt oder genau k Elemente **nicht** auswählt)

Additionseigenschaft $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $k \geq 1$

Rekursionseigenschaft $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

Vandermonde'sche Identität $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$

Beispielaufgabe

Wie viele Summanden $a^{93} \cdot b^7$ entstehen beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^{100}$?

$$\binom{100}{93} = \binom{100}{7} = \frac{100}{7} \cdot \frac{99}{6} \cdot \frac{98}{5} \cdot \frac{97}{4} \cdot \frac{96}{3} \cdot \frac{95}{2} \cdot \frac{94}{1} = 16007560800$$

Permutation und Kombination

Für die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten k auszuwählen, gilt:

Auswahl	**ohne Zurücklegen**	**mit Zurücklegen**
Kombination ohne Beachtung der Reihenfolge	$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$
Variation mit Beachtung der Reihenfolge	$P(n,k) = n \cdot (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Permutation mit Beachtung der Reihenfolge und $k = n$	$n!$	$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_m!}$ m = Anzahl der verschiedenen Elemente in n $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$

Beispiel zur Permutation mit Zurücklegen: Wie viele Anagramme gibt es zu „MISSISSIPPI“?

n = 11 (Buchstaben), m = 4 (verschiedene Buchstaben)
→ $\binom{11}{1,4,4,2}=\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}=34650$

Sonstiges

Eine n-Elementige Menge hat 2^n Teilmengen.

Schubfachprinzip

Verteilt man mehr als n Objekte auf n Fächer, enthält mindestens ein Fach mehr als ein Objekt; verteilt man mehr als $k\cdot n$ Objekte auf n Fächer, enthält mindestens ein Fach mehr als k Objekte.

Mengen

Summenregel: $|A\cup B|=|A|+|B|$ (nur wenn A und B disjunkte Mengen sind!)

Produktregel: $|A\times B|=|A|\cdot|B|$

(Eine Menge in Betragsstrichen steht für die Anzahl der Elemente in der Menge.)

Inklusions-Exklusions-Prinzip:
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ bzw. $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Beispiel: Wie viele Zahlen von 1 bis 1000 sind durch 6 oder 7 teilbar?
A = alle durch 6 teilbaren Zahlen, B = alle durch 7 teilbaren Zahlen
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor+\lfloor\frac{1000}{7}\rfloor-\lfloor\frac{1000}{6\cdot 7}\rfloor=285$

Darstellung von Zahlen

$0:=\emptyset, 1:=\{0\}=\{\emptyset\}, 2:=\{0,1\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}, 3:=\{0,1,2\}=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset\{\emptyset\}\}\}=...$

Es gilt: $m\cap n=min(m,n)$ und $m\cup n=max(m,n)$

Relationen

Eine Relation R zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A\times B$. Für $(a,b)\in R$ sagt man: „a steht in Relation R zu b".
Oft schreibt man auch a R b.

Umkehrrelation/inverse Relation

Umkehrrelation für $R\subseteq A\times B$: $R^{-1}=\{(b,a)|(a,b)\in R\}\subseteq B\times A$

Verkettung/Verknüpfung

Verkettung aus den Relationen $R\subseteq A\times B$ und $S\subseteq B\times C$:
$S\circ R=\{(a,c)|$ es gibt ein $b\in B$ mit $(a,b)\in R$ und $(b,c)\in S\}\subseteq A\times C$

Eigenschaften von Relationen für den Spezialfall R ⊆ A x A

Eine Relation R in A heißt

- **reflexiv**, wenn für alle $a\in A$ gilt: $(a,a)\in R$
  → Jedes Element steht zu sich selbst in Relation.

- **irreflexiv**, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a,a) \notin R$
  → Kein Element steht zu sich selbst in Relation.
- **symmetrisch**, wenn für alle $a,b \in A$ gilt: $(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$
  → Jede Relation gilt auch umgekehrt.
- **antisymmetrisch**, wenn für alle $a,b \in A$ gilt: $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R \Rightarrow a = b$
  → Gilt eine Relation umgekehrt sind die Elemente gleich.
- **asymmetrisch**, wenn für alle $a,b \in A$ gilt: $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$
  → Keine Relation gilt auch umgekehrt.
- **transitiv**, wenn für alle $a,b,c \in A$ gilt: $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
  → Bei Verkettung von Relationen besteht auch eine Relation zwischen erstem und letzten Element.

Äquivalenzrelation

Eine Relation *R* auf einer Menge *A* heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Für $(a,b) \in R$ sagt man auch: „*a* ist äquivalent zu *b*".

Äquivalenzklasse

R sei eine Äquivalenzrelation auf *A* und $a \in A$. Dann heißt die Menge $[a] = \{x \in A | (a,x) \in R\}$ die **Äquivalenzklasse** von *a*. Sie besteht als aus allen Elementen, die äquivalent zu *a* sind (und je zwei Elemente aus [*a*] sind auch äquivalent zueinander). Man nennt *a* und jedes andere Element aus [*a*] einen **Vertreter** aus dieser Äquivalenzklasse.

Sei *R* eine Äquivalenzrelation auf *A*, dann gilt:

- Je zwei verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt (besitzen kein gemeinsames Element).
- Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist gleich *A*.

Ordnung(srelation)

Eine Relation *R* in einer Menge *A* heißt **Ordnung(srelation)**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Eine Relation *R* in einer Menge *A* heißt **strikte Ordung(srelation)**, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Eine Relation *R* in einer Menge *A* heißt **totale Ordung(srelation)**, alle $(a,b) \in A$ bezüglich R in Relation gesetzt werden können.

Eigenschaften von Funktionen

- **injektiv**: es gibt nicht mehrere *x* mit gleichem f(x) → eindeutig umkehrbar
- **surjektiv**: alle Elemente der Zielmenge werden adressiert → für jedes *y* umkehrbar
- **bijektiv**: gleichzeitig injektiv und surjektiv → für jedes *y* eindeutig umkehrbar